

УДК 535.2

ОСОБЕННОСТИ АТОМ-ПОЛЕВОГО ПЕРЕПУТЫВАНИЯ В ДВУХФОТОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЭВИСА – КАММИНГСА

М.С. Русакова, Е.К. Башкиров, Е.Ю. Сочкова

Аннотация

В работе рассмотрены особенности атом-полевого перепутывания в различных двухфотонных моделях Тэвиса – Каммингса с позиций динамики волновой функции и динамики линейной энтропии для различных чистых начальных состояний атомов и сильного когерентного поля. Найдены выражения для времен восстановления систем в распутанные состояния. Определены начальные чистые состояния атомов, при которых в процессе эволюции происходит «распутывание» состояний подсистем.

Ключевые слова: атом-полевоe перепутывание, линейная энтропия, время распутывания, динамика волновой функции, двухфотонная модель Тэвиса – Каммингса, рамановское взаимодействие, невырожденное двухфотонное взаимодействие, вырожденная двухфотонная модель.

Введение

Одним из наиболее перспективных направлений современной квантовой оптики является исследование свойств перепутанных состояний в атомных системах и способов их генерации. Перепутанные состояния важны в таких областях, как квантовая криптография, физика квантовой информации, квантовые вычисления и связь [1]. Удобной моделью для исследования перепутывания является модель Джейнса – Каммингса (МДК), а также ее различные обобщения, учитывающие наличие второго атома (модель Тэвиса – Каммингса), многофотонное взаимодействие и т. п. Двухфотонное взаимодействие в моделях типа МДК играет важную роль благодаря высокой степени корреляции между испущенными фотонами. Для МДК с вырожденным, невырожденным двухфотонным и двухфотонным рамановским взаимодействием были исследованы динамика атомных населенностей и статистика поля, сжатие, атом-полевоe перепутывание [2]. Исследование атом-полевого перепутывания в моделях типа МДК было инициировано работами Феникса и Найта [3] и Ги-Банаклоче [4], где соответственно с позиций анализа асимптотики вектора состояния системы и анализа энтропии было показано, что на половине времени восстановления осцилляций Раби атомных населенностей в системе возникает распутывание состояний атома и поля. В настоящей работе исследованы свойства атом-полевого перепутывания в двухфотонных моделях Тэвиса – Каммингса с невырожденными и вырожденными двухфотонными переходами и в модели с невырожденными переходами рамановского типа. Найдены начальные чистые состояния атомов, при которых в системе возможна эволюция с распутыванием состояний атомной и фотонной подсистем, получены аналитические выражения для моментов времени распутывания.

1. Рассматриваемые модели и точное решение уравнения Шредингера для вектора состояния

Рассмотрим процесс атом-полевого перепутывания для двухфотонных моделей с невырожденными, вырожденными двухфотонными и невырожденными рамановскими переходами. Взаимодействие атомов с квантовым электромагнитным полем резонатора в таких моделях соответственно описывается гамильтонианами

$$H_{AF}^{nd} = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a_1^+ a_2^+ R_j^- + a_1 a_2 R_j^+),$$

$$H_{AF}^d = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a^{+2} R_j^- + a^2 R_j^+),$$

$$H_{AF}^{\text{Raman}} = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a_1^+ a_2 R_j^- + a_1 a_2^+ R_j^+),$$

где a_i (a_i^+) – оператор уничтожения (рождения) фотона в i -й моде поля (для вырожденного случая $a_1 = a_2 = a$), R_j^+ (R_j^-) – повышающий (понижающий) атомный оператор в j -м атоме, g_i – константа взаимодействия атомов с i -й модой поля. Для упрощения вычислений положили $g_1 = g_2 = g$.

Считая, что атомы в начальный момент времени находятся в суперпозиции состояний

$$|\Psi\rangle_{AT}(0) = \alpha|+, +\rangle + \beta|-, -\rangle + \gamma|+, -\rangle + \delta|-, +\rangle,$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$, а поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии с весовыми коэффициентами $C_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}$, для рассматриваемых невырожденных моделей мы нашли точное решение уравнения Шредингера для волновой функции системы в общем виде:

$$|\Psi\rangle(t) = \sum_{n_f} (A_{n_f}(t)|+, +\rangle + B_{n_f}(t)|-, -\rangle + C_{n_f}(t)|+, -\rangle + D_{n_f}(t)|-, +\rangle).$$

Здесь приняты обозначения $n_f = n_1, n_2$ для невырожденных моделей, $n_f = n$ для вырожденной модели.

Коэффициенты в выражении для волновой функции для модели с невырожденными двухфотонными переходами рассчитываются как

$$A_{n_1 n_2}(t) = \frac{2\alpha}{\Omega_1^2} C_{n_1} C_{n_2} ((n_1 + 2)(n_2 + 2) + (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cos \Omega_1 t) -$$

$$- \frac{4\beta}{\Omega_1^2} C_{n_1+2} C_{n_2+2} \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 2)} -$$

$$- \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega_1} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_1 t \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)},$$

$$B_{n_1 n_2}(t) = -\frac{4\alpha}{\Omega_2^2} C_{n_1-2} C_{n_2-2} \sin^2 \frac{\Omega_2 t}{2} \sqrt{n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)} +$$

$$+ \frac{2\beta}{\Omega_2^2} C_{n_1-1} C_{n_2-1} ((n_1 - 1)(n_2 - 1) + n_1 n_2 \cos \Omega_2 t) -$$

$$- \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega_2} C_{n_1} C_{n_2} \sin \Omega_2 t \sqrt{n_1 n_2},$$

$$\begin{aligned}
C_{n_1 n_2}(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
& -\frac{i\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} + \\
& + \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\gamma - \delta) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{n_1 n_2}(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
& -\frac{i\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} + \\
& + \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\delta - \gamma) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t),
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Omega_1(n_1, n_2) = \sqrt{2} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1) + (n_1+2)(n_2+2)} = \\
= \Omega_2(n_1+2, n_2+2) = \Omega_3(n_1+1, n_2+1).
\end{aligned}$$

Для модели с вырожденными двухфотонными переходами решение имеет вид

$$\begin{aligned}
A_n(t) = & \frac{2\alpha}{\Omega^2} C_n ((n+3)(n+4) + (n+1)(n+2) \cos \Omega t) - \\
& - \frac{4\beta}{\Omega^2} C_{n+4} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \\
& - \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega} C_{n+2} \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(t) = & -\frac{i\beta}{\Omega} C_{n+4} \sin \Omega t \sqrt{(n+3)(n+4)} + C_{n+2} \left(\gamma \cos^2 \frac{\Omega t}{2} - \delta \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right) - \\
& - \frac{i\alpha}{\Omega} C_n \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega} C_n \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)} - \frac{i\beta}{\Omega} C_{n+4} \sin \Omega t \sqrt{(n+3)(n+4)} + \\
& + C_{n+2} \left(\delta \cos^2 \frac{\Omega t}{2} - \gamma \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_n(t) = & -\frac{4\alpha}{\Omega^2} C_n \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega} C_{n+2} \sin \Omega t + \\
& + \frac{2\beta}{\Omega^2} C_{n+4} ((n+1)(n+2) + (n+3)(n+4) \cos \Omega t).
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения $\Omega = \sqrt{(n+1)(n+2) + (n+3)(n+4)}$. Для двухатомной модели с невырожденным рамановским взаимодействием коэффициенты не приведены ввиду их громоздкого вида.

2. Эволюция вектора состояния в случае сильного начального когерентного поля

Пусть поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии со средним числом фотонов в моде $\bar{n} \gg 1$. В работе далее будет показано, что если атомы приготовлены в некоторой суперпозиции чистых состояний, а поле – в когерентном большой интенсивности, то волновая функция полной системы в некоторые моменты времени может быть факторизована.

Найдем асимптотическую эволюцию векторов состояния рассматриваемых моделей Тэвиса–Каммингса. Полуклассические гамильтонианы взаимодействия данных коллективных двухфотонных моделей имеют вид:

$$H_{SC}^{nd} = \hbar g (v_1^* v_2^* R_1^- + v_1 v_2 R_1^+ + v_1^* v_2^* R_2^- + v_1 v_2 R_2^+),$$

$$H_{SC}^d = \hbar g (v^{*2} R_1^- + v^2 R_1^+ + v^{*2} R_2^- + v^2 R_2^+),$$

$$H_{SC}^{\text{Raman}} = \hbar g (v_1^* v_2 R_1^- + v_1 v_2^* R_1^+ + v_1^* \Upsilon_2 R_2^- + v_1 v_2^* R_2^+).$$

Собственные значения полуклассического гамильтониана для рассматриваемых моделей есть

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{2} [e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle + e^{i\varphi}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)],$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{2} [e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle - e^{i\varphi}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)],$$

$$|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle], \quad |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, -\rangle - |-, +\rangle].$$

Здесь $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ для модели с невырожденными двухфотонными переходами, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для модели с невырожденными рамановскими переходами (индексы 1 и 2 относятся к начальной фазе поля в соответствующей моде). Для вырожденной двухфотонной модели $\varphi = 2\tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi}$ – начальная фаза поля.

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана, а поле – в когерентном состоянии большой интенсивности, то волновая функция системы в любые моменты времени может быть представлена произведением волновых функций подсистем. Особый интерес представляют суперпозиции состояний $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$ вида

$$|\Phi_S\rangle = e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle - |\Phi_2\rangle), \quad |\Phi_B\rangle = e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle).$$

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в одном из приведенных выше суперпозиционных состояний, а поле – в когерентном состоянии большой интенсивности, то для всех рассматриваемых моделей в системе возникает распутывание в определенные моменты времени t_{dis} . Из анализа динамики волновой функции систем можно определить аналитические выражения для моментов времени распутывания:

$$t_{\text{dis}}^{nd} = \frac{\pi\sqrt{k}(2m+1)}{2g(k+1)} = \frac{T_R^{(1)}(2m+1)}{4(k+1)} = \frac{\tilde{T}_R^{(1)}(2m+1)}{2(k+1)},$$

$$t_{\text{dis}}^{d(1)} = (4m+1)\frac{T_R}{8}, \quad t_{\text{dis}}^{d(2)} = (4m+3)\frac{T_R}{8}, \quad t_{\text{dis}}^{d(3)} = T_R m,$$

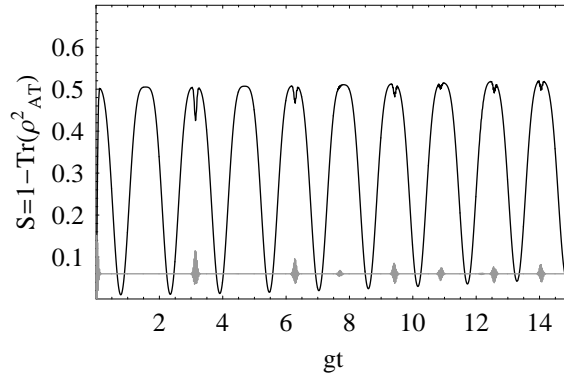


Рис. 1. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния $|\Phi_S\rangle$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$ ($k = 1$)

$$t_{\text{dis}}^{\text{Raman}} = \frac{\pi\sqrt{k}}{2g(k-1)} = \frac{T_R^{(1)}}{2(k-1)},$$

где $T_R(\tilde{T}_R)$ – период основных (вспомогательных) осцилляций Раби атомных населенностей, $k = \bar{n}_1/\bar{n}_2$ для невырожденных моделей, $m = 0, 1, 2, \dots$. Стоит отметить, что распутывание для выбранных начальных состояний подсистем в указанные моменты времени для модели с невырожденными рамановскими переходами происходит только для $k > 1$. Для модели с вырожденными двухфотонными переходами в моменты времени $t_{\text{dis}}^{d(3)} = T_R m$ распутывание возникает для любых чистых начальных атомных состояний.

3. Динамика линейной энтропии для различных начальных состояний атомов и поля

Выводы о характере динамики перепутывания, сделанные на основании анализа вектора состояния системы, могут быть подтверждены при рассмотрении эволюции линейной атомной энтропии. Для рассматриваемых моделей линейная энтропия редуцированной атомной матрицы плотности имеет вид

$$\begin{aligned} S = 1 - \text{Tr}(\rho_{AT}^2) = & \left[\left(\sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} A_{n_f}^* \right)^2 + \left(\sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} B_{n_f}^* \right)^2 + \left(\sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} C_{n_f}^* \right)^2 + \left(\sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} D_{n_f}^* \right)^2 + \right. \\ & + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} B_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} A_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} C_{n_f}^* + \\ & + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} C_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} A_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} A_{n_f}^* + \\ & \left. + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} C_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} B_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} B_{n_f}^* \right], \end{aligned}$$

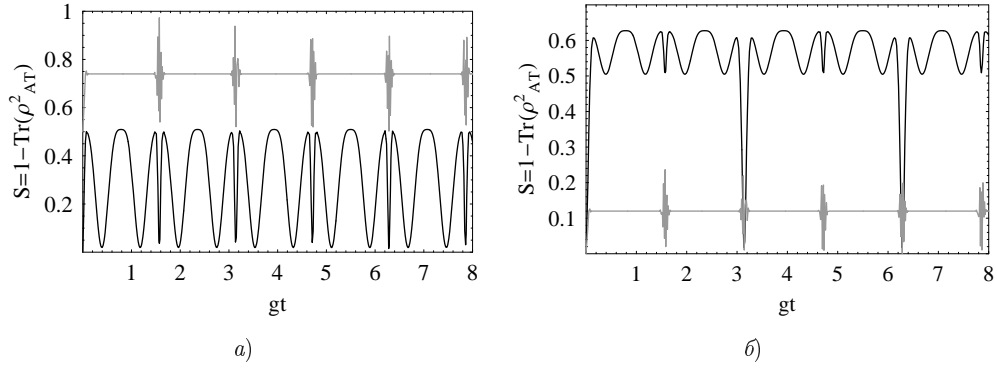


Рис. 2. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния: а) $|\Phi_S\rangle$; б) $|+,-\rangle$ и $\bar{n} = 50$

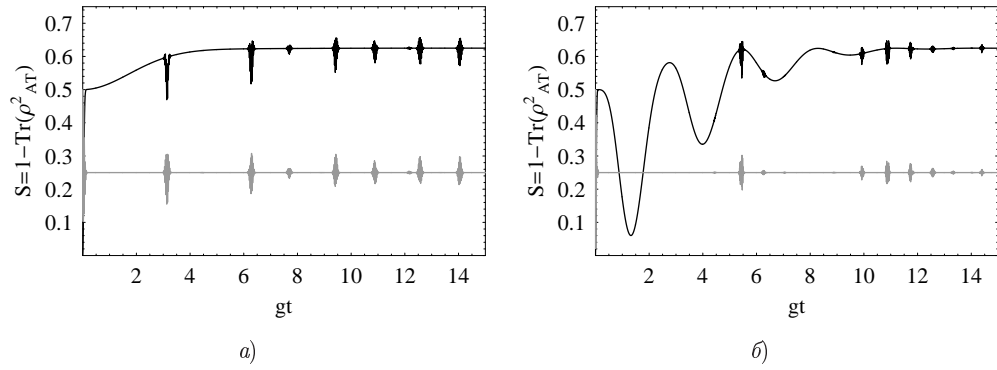


Рис. 3. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния $|\Phi_S\rangle$ и (а) $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$ ($k = 1$); (б) $\bar{n}_1 = 150$, $\bar{n}_2 = 50$ ($k = 3$)

где $n_f = n_1, n_2$ для невырожденных моделей и $n_f = n$ для вырожденной. Значение линейной энтропии $S = 0$ соответствует распутанному состоянию, $S = 3/4$ – максимальному перепутыванию атомов с полем.

На рис. 1–3 представлена эволюция линейной энтропии для рассматриваемых моделей в случае когерентного начального состояния поля большой интенсивности и различных чистых начальных атомных состояний. Для наглядности на графиках серым цветом приведена вероятность обнаружить оба атома в возбужденном состоянии.

Для двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами линейная энтропия стремится к нулю в моменты времени, описываемые выражением для t_{dis}^{nd} , что соответствует наличию распутывания состояний в системе (см. рис. 1). Для коллективной модели с вырожденными двухфотонными переходами распутывание наблюдается для любых начальных чистых атомных состояний в моменты времени $t_{\text{dis}}^{d(3)}$ (рис. 2, б), а для чистых атомных состояний $|\Phi_S\rangle$ и $|\Phi_B\rangle$ график линейной энтропии демонстрирует наличие трех серий распутываний, соответствующих временам $t_{\text{dis}}^{d(1)}$, $t_{\text{dis}}^{d(2)}$ и $t_{\text{dis}}^{d(3)}$ (рис. 2, а).

В модели Тэвиса – Каммингса с невырожденным рамановским взаимодействием линейная энтропия не обращается в нуль в случае, когда поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии с равным большим числом фотонов в обеих модах и любых чистых начальных состояний атомов, то есть система после начала эволюции всегда находится в сильно перепутанном состоянии (см. рис. 3, *a*). Если же атомы приготовлены в одном из состояний $|\Phi_S\rangle$ или $|\Phi_B\rangle$, то в моменты времени $t_{\text{dis}}^{\text{Raman}}$ линейная энтропия стремится к нулю, то есть состояния атомов и поля «распутываются» (рис. 3, *b*).

Summary

M.S. Rusakova, E.K. Bashkirov, E.Yu. Sochkova. About Atom-Field Entanglement in Two-Photon Tavis–Cummings Models.

The characteristic properties of atom-field entanglement in various two-photon Tavis–Cummings models are considered both in terms of wave function dynamics and linear entropy dynamics for several initial pure atomic states and a strong coherent field. The expressions for disentanglement times are found for each model. The initial pure atomic states, which are necessary for the disentanglement of subsystem states, are determined.

Key words: atom-field entanglement, linear entropy, disentanglement time, wave function dynamics, two-photon Tavis–Cummings model, Raman interaction, nondegenerate two-photon interaction, degenerate two-photon model.

Литература

1. Баумейстер Д., Экерт Ф., Цайлингер А. Физика квантовой информации. – М.: Постмаркет, 2002. – 376 с.
2. Dell’Anno F., De Siena S., Illuminati F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering // Phys. Rep. – 2006. – V. 428 – P. 53–168.
3. Phoenix S.J.D, Knight P.L. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes–Cummings model // Phys. Rev. A. – 1991. – V. 44, No 9. – P. 6023–6029.
4. Gea-Banacloche J. Atom- and field-state evolution in the Jaynes–Cummings model for large initial fields // Phys. Rev. A. – 1991. – V. 44, No 9. – P. 5913–5931.

Поступила в редакцию
04.12.09

Русакова Маргарита Сергеевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета.

E-mail: *ruta@ssu.samara.ru*

Башкиров Евгений Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.

E-mail: *bash@ssu.samara.ru*

Сочкова Екатерина Юрьевна – аспирант кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.